

# 哥德爾

bee\*

114.08.26

20 世紀，科學界的一大高手！

對他好奇的原因是：他是愛因斯坦的好朋友！

## 摘要

介紹二十世紀邏輯學巨擘 Kurt Gödel ( 哥德爾，1906–1978 )：從其早年與維也納歲月、一階邏輯完備定理與兩個不完備定理，到普林斯頓時期與愛因斯坦的交往、在集合論中關於可構造宇宙與連續統問題的突破、相對論中的哥德爾宇宙、以及入籍美國的傳奇軼事。

最後是我的小小感受。<sup>1</sup>

## 1. 早年與維也納歲月

- **1906** 年生於奧匈帝國布爾諾 ( 今捷克布爾諾 )。幼時好奇心極強，家人暱稱其為「為什麼先生」( 德語：Der Herr Warum ) (小學到中學的成績非常出色)。
- **1924–1930** 年 就讀維也納大學，投入數理邏輯與集合論研究；與維也納學派學者往來，但對邏輯實證主義之哲學立場保持距離。
- **1929** 年：他在 23 歲的博士論文中證明一階邏輯完備定理：在一階邏輯中，凡在所有模型皆為真 ( 語義有效 ) 的公式，都可在公理系中被證明 ( 句法可證 )。該成果嚴整地銜接了一階邏輯的「語義」與「句法」。

---

\*bee 美麗之家: <http://www.beehome.idv.tw>

<sup>1</sup>本文來自於 Chatgpt 的資料整理，與我在完美的理論一書中的閱讀收穫。

## 2. 震撼二十世紀的兩個「不完備」

- 1931 年發表兩個不完備定理，改寫希爾伯特計畫版圖：

- 1) 第一不完備定理：任何足以表達算術、且一致（不矛盾）的有效可演算法化理論，必不完備：存在在該理論中既無法證明也無法證偽的真命題。
- 2) 第二不完備定理：此類理論無法在自身內證明自身的一致性。

- 技術關鍵是所謂「哥德爾編碼」：將語句與證明算術化，使系統能自我指涉，進而構造出「此句不可被證明」型的命題。

哥德爾是數理邏輯學家。

希爾伯特想建立數學的大一統理論——由有限的公設出發，在有限的推理中，將數學定理做完備性的敘述（所謂的完備，就是一定可以判斷其真或偽）。希爾伯特在 1899 年就將歐幾里德的幾何原本做嚴格的公理化。

哥德爾的不完備定理：任何足夠強、可遞歸公理化且一致的系統都不完備；而且不能在自身內證明自身一致性。說明希爾伯特想做的事情是做不到的。

## 3. 戰雲、遠行與普林斯頓

- 1930 年代中期起健康欠佳、焦慮加劇；1936 年維也納學派領袖 Moritz Schlick 遇害，情勢更形嚴峻。
- 1938 年與 Adele Nimbursky（愛德勒）結婚；德奧合併後局勢惡化。
- 1940 年夫妻二人經蘇聯橫越西伯利亞至日本，再赴美抵普林斯頓，加入高等研究院（IAS）。與愛因斯坦成爲知己，幾乎每日結伴散步討論哲學與科學。相傳愛因斯坦晚年曾言，去辦公室的最大動力之一，就是能與哥德爾一起走回家。

愛因斯坦雖然是一位科學界的巨星，也常常四處旅行演講，但是在普林斯頓高等研究院，他就是孤獨的一個人。當量子力學興起之後，廣義相對論的被冷落，也讓愛因斯坦更爲寂寞。

但是，在普林斯頓有個人天天在愛因斯坦旁邊和他聊天，這個人就是哥德爾。

## 4. 集合論與連續統問題

- 1940（普林斯頓小冊）：提出「可構造宇宙 L」，證明在 ZF（策梅洛-弗蘭克爾公理）一致的前提下，選擇公理（AC）與連續統假說（CH）相容。換言之， $ZF \not\vdash \neg AC$  且  $ZF \not\vdash \neg CH$ 。

- 其後 1963 年 Cohen 以 forcing 技術證明 ZF 也不能證 CH，與哥德爾結果合觀，顯示：CH 對 ZF 獨立。

## 5. 相對論的意外交會：時間旅行的宇宙

- 1949 年為愛因斯坦 70 歲文集撰文，提出一個旋轉宇宙解（今稱哥德爾度規），其中存在閉合類時曲線（CTCs）。在該解裡，【時間旅行】在廣義相對論方程下並非被禁止，為【時間本質】投下哲學與物理上的震撼問題。

## 6. 入籍傳奇

- 1948 年申請成為美國公民。為準備面談，他細讀美國憲法並自稱發現一條「若作特定解釋，理論上可能導向獨裁」的路徑。面談當天由愛因斯坦與莫根斯坦陪同，法官見勢不妙即打斷其「證明」，才化解這場邏輯炸彈般的對話。

## 7. 想像

從 Chatgpt 收集到的其他資料都被我刪除了。

哥德爾的不完備說，很早就聽過了，但是，不清楚其內容，只知道這件事在數學界弄了一個大窟窿。不過，對我們初階者，應該沒有甚麼影響。

我透過 Chatgpt 把哥德爾的不完備理論弄出來看，發現真是很難，事實上是完全看不懂。數理邏輯學家探討的內容是甚麼呢？除了證明，他們還關心甚麼呢？

和愛因斯坦成為好朋友，真是一件不簡單的事情。要能理解愛因斯坦想討論的話題，能欣賞愛因斯坦的才華（當時，廣義相對論是落寞的），還要能讓愛因斯坦欣賞他對話的內容。如果你不告訴我：他是誰？我必然非常好奇。

這人就是哥德爾！

哥德爾弄出了時間旅行，這到底是真實、數學解、還是想像！哥德爾不是寫小說而已，這裡有「哥德爾度規」（旋轉宇宙解），是廣義相對論下的重要推論。

從數學到物理，想了解哥德爾的動機，竟然是因為愛因斯坦。著實有趣！

哥德爾是一位令人好奇的【科學界超級高手】。